CABRI 3D VE VÝUCE STEREOMETRIE

Šárka Gergelitsová

Gymnázium Benešov

email: sarka@gbn.cz

Abstrakt. Program Cabri 3D od verze 2.0 se zařadil mezi užitečné nástroje moderní výuky matematiky. Přiměřená škála nástrojů vyhovuje jak potřebám základní tak i střední školy. Zmíním několik příkladů využití tohoto programu v gymnaziálním kurzu stereometrie a analytické geometrie. Program dovoluje řešit (a zobrazit výsledek navrženého postupu) trojrozměrné úlohy bez nutnosti zabývat se zobrazovacími metodami. Zmíním také možnosti systému při přípravě materiálů, s nimiž pak mohou studenti pracovat klasickými postupy.

Klíčová slova: Cabri 3D, stereometrie, analytická geometrie, zadávání prvků, souřadnice

Prostředí programu

Cabri 3D je školský systém dynamické geometrie. Je pravdou, že jeho počáteční verze (první pochází z roku 2004) byly zatíženy velkým množstvím chyb a uživatelé v něm postrádali některé užitečné funkce. Verze 2.0 však přinesla výrazný obrat k lepšímu a další vylepšení přináší (v době vzniku příspěvku nová) verze 2.1, která je poskytována jako upgrade pro vlastníky licence verze 2.0 zdarma, pro uživatele nižších verzí za poplatek. Program se tak zařadil mezi užitečné a výkonné nástroje moderní výuky matematiky. Přiměřená škála dostupných nástrojů vyhovuje potřebám základní i střední školy. V jeho (zatím) poslední verzi již nechybí možnost zadávat body ve scéně přímo jejich souřadnicemi, možnost zobrazit zápis konstrukce a možnost upravit palety nástrojů (dříve musel uživatel kvůli takové úpravě pozměnit příslušný XML soubor). Autoři dále doplnili některá zobrazení, nástroje pro měření a nástroje využitelné v analytické geometrii, práci se stopou objektu při pohybu, změnili způsob nápovědy a vylepšili mnohé další konstrukční nástroje. Detailněji se o nich zmíním v dalším textu. V programu však zatím stále postrádám možnost, kterou nabízí Cabri II, tvorbu vlastních makrokonstrukcí.

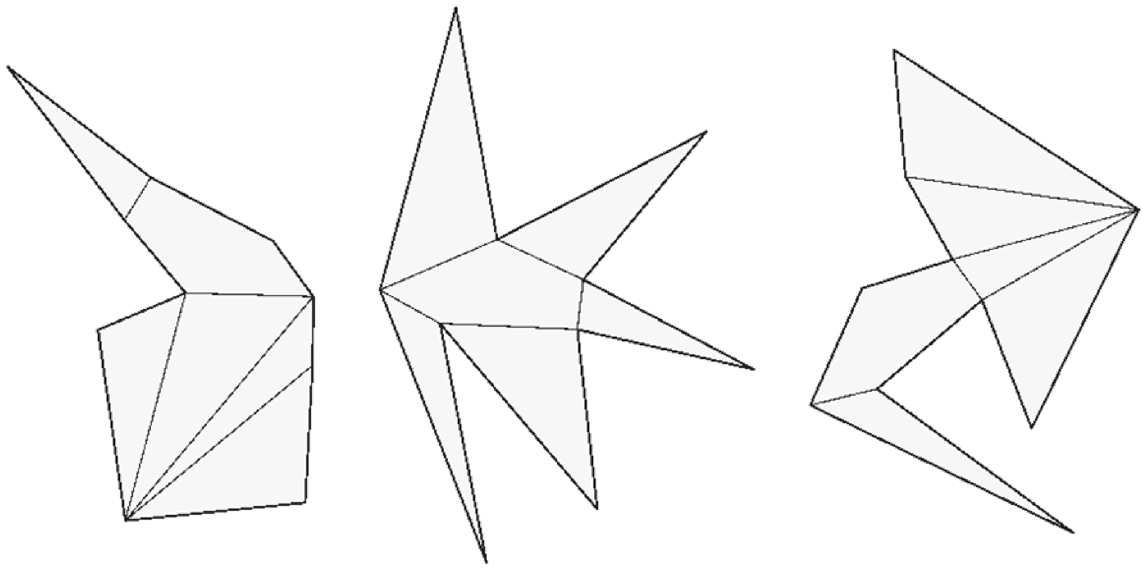
Při práci s programem se rozhodně vyplatí prohlédnout si přiložené sady příkladů. Nejen, že nám to ušetří spoustu práce s vymýšlením a konstrukcí úloh ze stereometrie (úlohy, které chceme se žáky řešit a zejména mnohé demonstrační příklady, které jim chceme ukazovat, jsou většinou podobné „na celém světě“), ale můžeme se tak inspirovat k využití programu, které by nás jinak nenapadlo. Materiály najdete ke stažení na webových stránkách výrobce, tj. na adrese http://www.cabri.com. Prostředí programu na ně také přímo odkazuje (menu NÁPOVĚDA – TUTORIÁLY).

Sítě těles

Systémy dynamické geometrie jsou vhodné nejen pro přímé interaktivní využití – pro učitele při demonstraci nových pojmů a k interaktivní samostatné práci studentů. Mohou také výrazně pomoci učitelům při přípravě materiálů, s nimiž pak mohou studenti pracovat klasickými postupy. To je cenné zejména proto, že při vývoji prostorové představivosti je manipulace se skutečnými, hmotnými objekty nezastupitelná.

V paletě nástrojů pro práci s mnohostěny najdeme nástroj, jímž můžeme z daného konvexního mnohostěnu vytvořit jeho síť. Po vytvoření sítě původní mnohostěn zmizí (je automaticky označen jako skrytý). Pro další postup jej zobrazíme (menu OKNO – AKTIVNÍ OKNO – ZOBRAZIT SKRYTÉ OBJEKTY nebo stisk pravého tlačítka myši nad oknem scény – ZOBRAZIT SKRYTÉ OBJEKTY). Další nástroj, PŘIDAT STRÁNKU SE SÍTÍ (menu DOKUMENT), tuto síť zobrazí na další samostatný list – stránku, kterou můžeme vytisknout na tiskárně. Síť na samostatné straně zůstává dynamicky spojena s původním mnohostěnem, změnou definičních prvků mnohostěnu ji tudíž můžeme změnit. Takto můžeme rychle a pohodlně vytvořit sadu sítí různých těles a rozdat je studentům pro další manipulaci. Postup ještě dále vylepšíme, vytvoříme RŮZNÉ SÍTĚ TÉHOŽ TĚLESA.

To, jak se rozbalí síť daného mnohostěnu, nemůžeme ovlivnit. V tutoriálech můžeme najít postupy, jak pomocí otáčení či posouvání vytvořit několik sítí krychle, ty však mají jiný cíl a rozhodně nejsou rychlé.



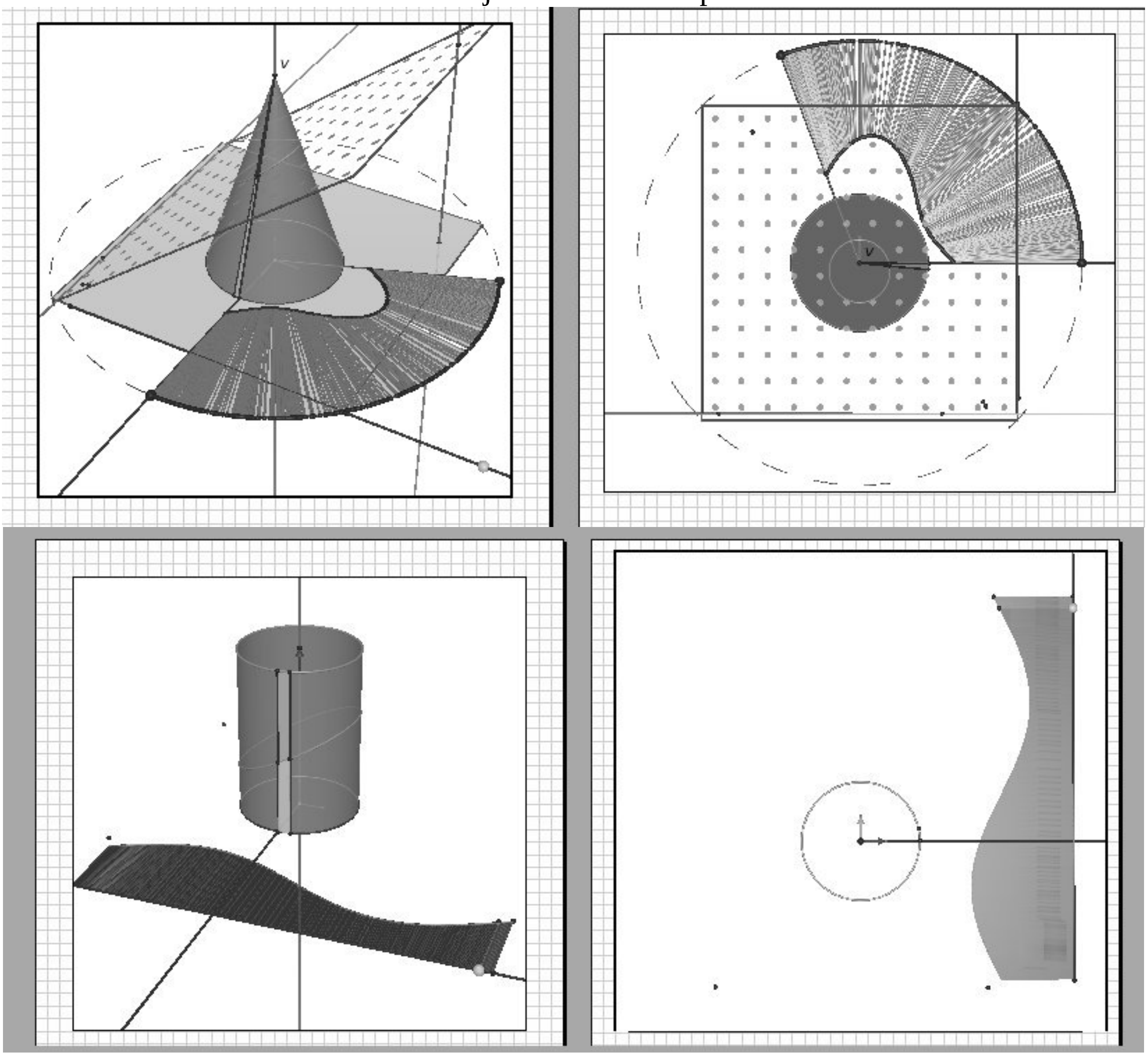
V menu MNOHOSTĚNY však najdeme nástroj (možná jinak ne příliš používaný) KONVEXNÍ MNOHOSTĚN, který vytvoří mnohostěn, který je nejmenší konvexní obálkou zadaných definičních prvků. Jak se rozbalí jeho síť sice také ovlivnit nemůžeme, záleží to však na postupu, jímž jsme mnohostěn vytvořili, tedy na prvcích, jímž jsme jej definovali. Pokud tedy vytvoříme konvexní obálku z prvků původního mnohostěnu, získáme týž mnohostěn, jehož síť se rozevře „nějak jinak“. Pokud se tvoří stále stejná síť (v případě jehlanů), nezobrazujte znovu původní jehlan, ale vytvořte nové objekty – úsečky na místě hran původního jehlanu a sestrojte konvexní obálku těchto úseček místo hran původního tělesa. Síť se obvykle podaří „rozbalit“ od stěny, kterou jste do obálky zařadili jako první.

Máme tedy postup, jímž můžeme vytvořit novou síť, i pro ni si necháme vygenerovat samostatnou stránku se sítí a uvedený postup zkusíme zopakovat.

Vše vytiskneme, původní těleso pozměníme, opět vytiskneme atd. Rozdáme takové (vesměs různé) listy ve třídě studentům (vybaveným nůžkami) a vyzveme je, aby se seskupili do skupin podle tělesa, jehož síť právě obdrželi (ti, kdo mají sítě shodných mnohostěnů, vytvoří jednu skupinu). Nejprve sítě nevystřihují a hledají kritéria pro posouzení shodnosti. Poté sítě vystřihnou a „složí“. Při ověřování výsledků pak zajisté vznikne otázka přímé a nepřímé shodnosti. Tento postup jsem vyzkoušela se studenty druhého ročníku gymnázia. Aktivní zopakování pojmu *Sítě těles* tak trvalo 20 minut.

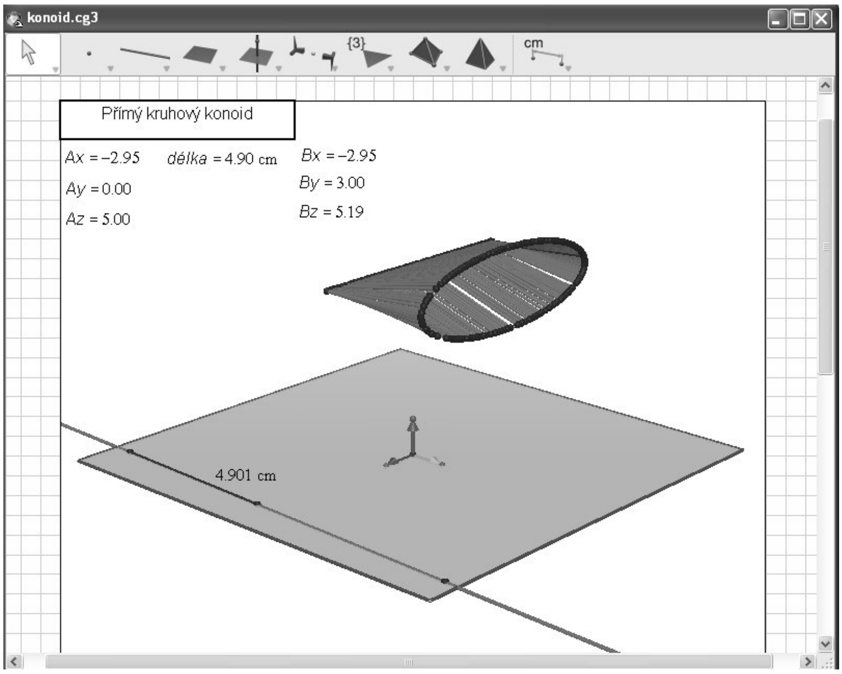
Sítě dalších těles

Cabri 3D má nástroj pro tvorbu sítí mnohostěnů, neumí však vytvořit síť válce či kužele. Hezkou, dynamickou demonstraci rozvinutí sítě rotačního kužele najdeme v připravených demonstračních příkladech na výše zmiňovaném webu. S pomocí nástroje STOPA OBJEKTU (při pohybu) ze sady nástrojů KONSTRUKCE můžeme vymodelovat ukázku sítí dalších těles. Cabri 3D obsahuje nově možnost vytvořit i stopu mnohoúhelníku a pomocí této stopy demonstrovat rozvinutí sítě seříznutého jehlanu či sítě eliptického válce.



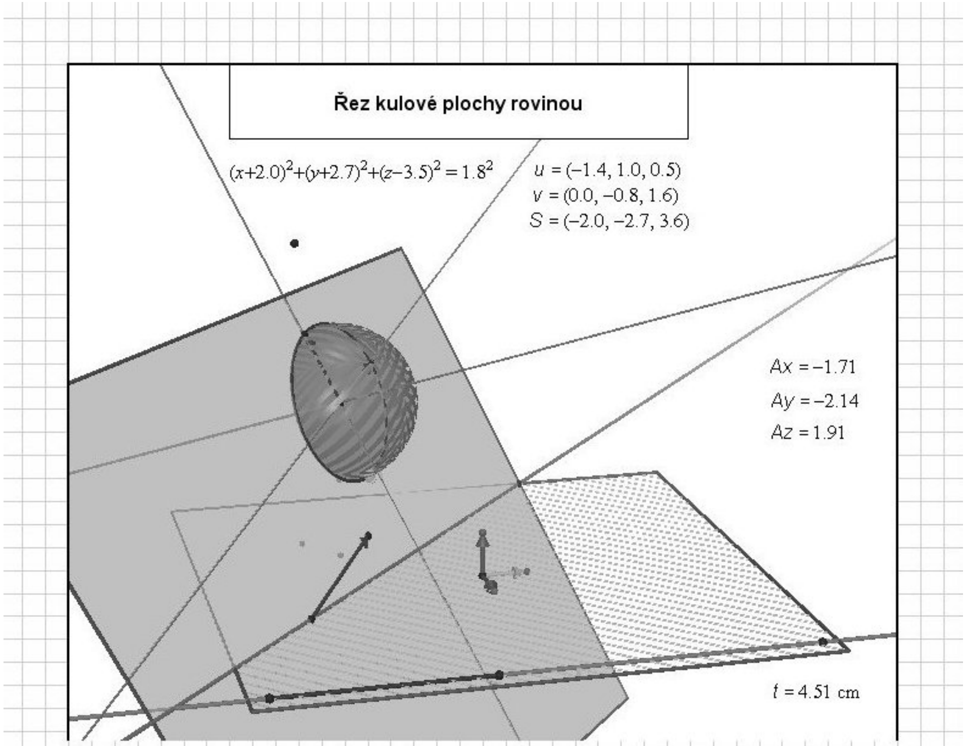
Analytická geometrie, křivky a plochy

Nové nástroje dostupné od verze 2.0 a zejména od verze 2.1 činí z Cabri 3D také nástroj použitelný při výuce analytické geometrie. Nemůže sice soupeřit s programy typu CAS, ale tím, že klade důraz na zobrazení základních geometrických útvarů, pomůže podpořit vnímání souvislostí syntetického a analytického vyjádření objektů. Program dokáže nově vyčíslit kromě délek, povrchů a objemů také skalární součin vektorů a zobrazit vektor, který je vektorovým součinem daných vektorů. Přestože je práce se souřadnicemi a rovnicemi přímek a rovin poněkud neobratná (přímka je určena dvojicí rovnic – obecných rovnic dvou z rovin, které přímkou procházejí), můžeme pomocí již zmíněné stopy bodu (přímky, úsečky, kuželosečky) a nástroje pro pohyb zobrazit parametricky zadané křivky a různé (např. přímkové) plochy v prostoru. Při využití zadání bodu pomocí souřadnic si můžeme troufnout i na pomoc našim nedávným absolventům, kteří si v kurzu geometrie na VŠ zoufají nad takovými plochami, jako jsou různé konoidy. Zajímavá je také možnost demonstrace různých ploch vzniklých tažením (sweep). Sledováním stopy mnohoúhelníku lze simulovat také různé objemy. Znázornění ploch pomocí stopy úsečky, vektoru, přímky nebo kuželosečky však má značná omezení, sestrojená stopa není plnohodnotným geometrickým objektem. Nelze ji například dynamicky modifikovat.



Úvodní kapitoly celku *Analytická geometrie* – kapitola *Souřadnice* a zejména kapitola *Vektory* – jsou pro mnohé studenty dosti abstraktní. S pomocí Cabri 3D můžeme snadno ukázat význam takových pojmů, jako je lineární kombinace a lineární závislost vektorů (v rovině, v prostoru), souřadnice bodu v rovině. Můžeme demonstrovat, kdy leží bod v rovině, uvnitř/vně daného trojúhelníku apod.

Pro znázornění vztahů mezi polohou roviny, jejím normálovým vektorem a souřadnicemi bodu v rovině pomohou nástroje SOUŘADNICE A ROVNICE, pro znázornění vlastností vektorů nástroje SKALÁRNÍ SOUČIN a SOUŘADNICE ze sady nástrojů MĚŘENÍ a VEKTOROVÝ SOUČIN ze sady nástrojů KONSTRUKCE.



Již zmíněný postup, kterým můžeme znázornit parametricky zadanou křivku, dovolí vyjádřit řez kulové plochy obecnou rovinou. Analytické ověření, že jde o kružnici, bylo při dosavadních postupech ve škole nemožné. Cabri 3D takový nástroj poskytuje.

Několik stereometrických úloh

Při interaktivní práci pak systémy dynamické geometrie dovolují studentům řešit (a zobrazit výsledek navrženého postupu) úlohy zadané přímo v prostoru bez nutnosti zabývat se zobrazovacími metodami. Vynechání tohoto – jakkoli užitečného – kroku urychluje řešení a umožňuje zařadit do kurzu nové typy úloh. Systém dynamické geometrie navíc umožňuje experimentovat a zkoumat počet řešení dané úlohy. Podívejme se na několik příkladů.

- **Krychle**

ÚLOHA: SESTROJTE VŠECHNY KRYCHLE, JEJICHŽ HRANY LEŽÍ NA DVOU DANÝCH MIMOBĚŽKÁCH.

Po krátké úvaze studenti zajisté dojdou k závěru, že zadané přímky musí být navzájem kolmé, jinak úloha nemá řešení. Hrana, kterou najdeme, je k oběma daným přímkám kolmá a protíná je. Sestrojíme tedy nejkratší příčku daných mimoběžek a získáme délku hrany krychle.

Přímá konstrukce nejkratší příčky dvou mimoběžek mezi nástroji není, nástroje měření však obsahují příkaz VZDÁLENOST, kterým můžeme bez konstrukce získat délku této příčky. (Škoda, že Cabri 3D neposkytuje možnost makrokonstrukcí; sestrojení nejkratší příčky dvojice mimoběžek je vhodným kandidátem na takovou konstrukci.)

Zbývá už jen (prostředky Cabri 3D) sestrojit požadovanou krychli a najít všechna řešení.

- **Kulová plocha opsaná čtyřstěnu**

ÚLOHA: SESTROJTE VŠECHNY KULOVÉ PLOCHY OPSANÉ DANÉMU ČTYŘSTĚNU.

Tato konstrukce (koule zadaná čtveřicí nekomplanárních bodů) byla v prvních verzích jednou z možností přímého zadání kulové plochy. Bohužel, již tam není. Její konstrukce je však prostorovou analogií konstrukce kružnice opsané trojúhelníku a je tedy snadným cvičením na seznámení s konstrukčními možnostmi Cabri 3D. Sestrojíme roviny souměrnosti dvojic zadaných vrcholů (roviny souměrnosti tří nekomplanárních hran čtyřstěnu) a jejich společný bod je střed hledané kulové plochy. Kulová plocha prochází vrcholy čtyřstěnu.

- **Kulová plocha vepsaná čtyřstěnu**

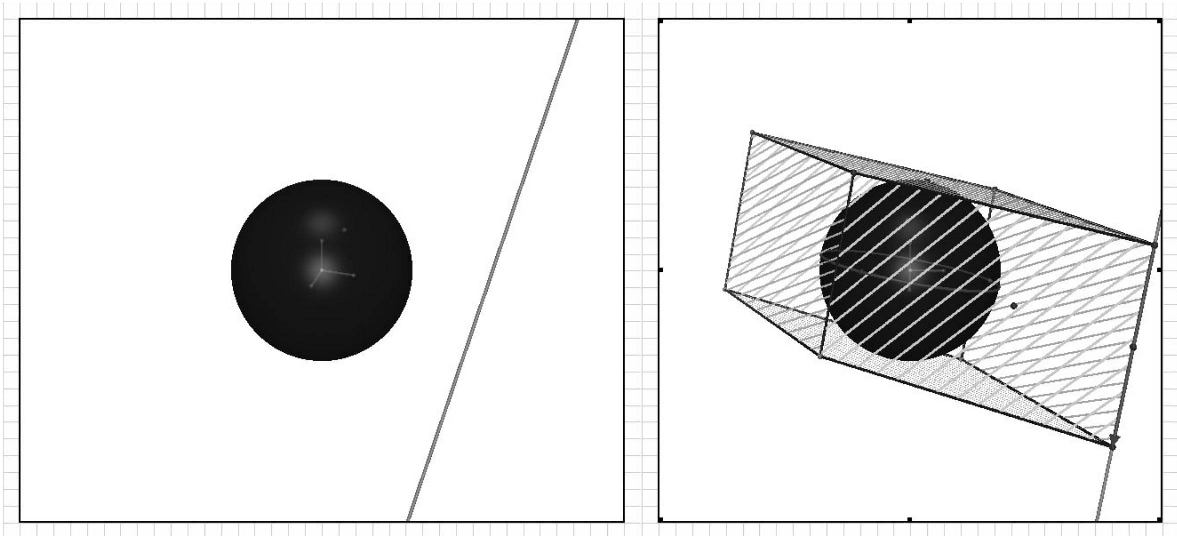
ÚLOHA: SESTROJTE VŠECHNY KULOVÉ PLOCHY VEPSANÉ DANÉMU ČTYŘSTĚNU.

Tato konstrukce je už obtížnější. Kulová plocha se dotýká všech stěn tělesa, má tedy střed v rovinách souměrnosti dvojic zadaných stěn. Nástroj, který by sestrojil rovinu souměrnosti dvojice rovin, není mezi konstrukcemi k dispozici. Pomůže nám například kružnice, jejíž „osou“ (to je v Cabri terminologii název pro přímku procházející středem kružnice kolmo k rovině kružnice) je průsečnice daných rovin, přesněji: využijeme příslušné průsečíky této kružnice s danými rovinami. Rovina souměrnosti dvojice průsečíků je hledaná rovina souměrnosti daných rovin. Dále již můžeme postupovat obdobně jako ve výše uvedeném příkladu. Poloměr kulové plochy určíme pomocí kolmice spuštěné z nalezeného středu na stěnu tělesa.

- **Hranol**

ÚLOHA: SESTROJTE VŠECHNY KOLMÉ ČTYŘBOKÉ ROVNOBĚŽNOSTĚNY OPSANÉ DANÉ KULOVÉ PLOŠE. HRANOL MÁ JEDNU BOČNÍ HRANU V DANÉ PŘÍMCE.

Po úvaze (či několika pokusech s tečnými rovinami dané kulové plochy) zjistíme, že dvě stěny hledaného hranolu budou ležet v tečných rovinách dané kulové plochy, které procházejí danou přímkou. Pokud přímka danou kulovou plochu protíná či se jí dotýká, úloha nemá řešení.



Rovina souměrnosti hranolu kolmá k dané přímce prochází středem dané kulové plochy. Využijeme ji tedy a sestrojíme v ní střední příčky stěn hranolu jako tečny z bodu (průsečíku dané přímky s rovinou) ke kružnici (průniku dané kulové plochy s rovinou). Roviny stěn jsou určeny danou přímkou a nalezenými tečnami. Protilehlé stěny získáme souměrností.

Podstavou hranolu musí být kosočtverec shodný s řezem hranolu středem kulové plochy kolmo k bočním hranám. Jeho strany jsme sestrojili výše. Podstavy tělesa získáme například posunutím středového řezu o poloměr kulové plochy ve směru bočních hran hranolu.

Stránku s ukázkami a dalšími příklady najdete na adrese: http://www.gbn.cz/cabri/3D/.